2015/12/9

الموضوع: 16

* تمهيدية:
ليكن A_1 ، A_2 جبري لي فوق الحقل K عندئذٍ:
$B_1 = A_1 \times \{0\} = \{(a,0) ; a \in A_1\}$
$B_2 = \{0\} \times A_2 = \{(0,b) ; b \in A_2\}$
جبور جزئية في $A_1 \times A_2$

البرهان:
$B_1 \neq \phi$ لأن $(0,0) \in B_1 \subseteq A_1 \times A_2$
$a_1, a_2 \in A_1$ ، $\forall \alpha, \beta \in K ; (a_1,0) \in B_1 ; (a_2,0) \in B_1$
فإن
$\alpha(a_1,0) + \beta(a_2,0) = (\underbrace{\alpha a_1}_{\in A_1}, 0) + (\underbrace{\beta a_2}_{\in A_1}, 0) \in B_1$
ومنه B_1 مودول جزئي من $(A_1 \times A_2, +)$

$[(a_1,0),(a_2,0)] = ([a_1,a_2],[0,0]) = (\underbrace{[a_1,a_2]}_{\in A_1}, 0) \in B_1$
إذا B_1 جبر جزئي في $A_1 \times A_2$
بنفس الطريقة نبرهن ان B_2 جبر جزئي في $A_1 \times A_2$

* تمهيدية:
ليكن A_1 ، A_2 جبري لي فوق الحقل K:
ان $A_1 \cong A_1 \times \{0\}$ و $A_2 \cong \{0\} \times A_2$

بداية البرهان: $f: A_1 \longrightarrow A_2 \times \{0\}$
$f(a) = (a,0)$ ونتابع لنثبت ان f تماثل

* تمهيدية:
ليكن A_1 ، A_2 جبري لي فوق الحقل K ، ان كل من B_1 ، B_2
مثالي في $A_1 \times A_2$

البرهان:
وجدنا ان كل من B_1 ، B_2 مودول جزئي في $A_1 \times A_2$

بنفس طريقة نبرهن على ان $\forall (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2, (b_1, 0) \in B_1$

فان

$[(a_1, a_2), (b_1, 0)] = ([a_1, b_1], [a_2, 0]) = ([a_1, b_1], 0)$

$\in A_1 \Rightarrow ([a_1, b_1], 0) \in B_1$

اي ان B_1 مثالي في $A_1 \times A_2$

وبنفس الطريقة نثبت ان B_2 مثالي في $A_1 \times A_2$

*** المجموع المباشر ***

تعريف: ليكن A جبر لي فوق الحقل K، و B, D مثاليين في A

نقول ان A هو مجموع مباشر للمثاليين B, D ونكتب

$$A = B \oplus D$$

اذا كان

$$A = B + D$$

$$B \cap D = \{0\}$$

تذكير:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R،

• ان $Z(A) = \{a ; a \in A , [a, x] = 0 , \forall x \in A\}$

تسمى مركز A.

ان $Z(A)$ مثالي في A

• اذا كان B مثالي في A تسمى المجموعة

$Z(B) = \{b : b \in B ; [b, y] = 0 , \forall y \in B\}$

مركز المثالي B وهي مثالي في B

• وتسمى المجموعة

$Z_A(B) = \{a \in A ; [a, x] = 0 \quad \forall x \in B\}$

ممركز B في A وتشكل مثالي في A وليس B

* تعريف: ليكن A جبر لي فوق الحلقة

نقول ان عن A انه تام اذا كان

1) $Z(A) = 0$

2) $Der(A) = Inn(A)$ كل اشتقاق هو اشتقاق داخلي

• ونقول عن المثالي B انه تام في A اذا كان

1) $Z(B) = 0$

2) $Der(B) = Inn(B)$

* ملاحظة

ليكن A جبر لي فوق الحقل $\mathbb{R}$ A مجموع مباشر لأي مثالي تام مع مركزه

عندئذ لأجل أي مثالي تام B في A فإن:

$$A = B \oplus Z_A(B)$$ → مركز

البرهان:

ليكن B مثالي تام في A ، $Z_A(B)$ مثالي في A

وبما

$B + Z_A(B) \subseteq A$ مثالي في A

أي

ليكن $a \in A$ ولنأخذ تطبيق الاشتقاق الداخلي

$d_a : A \longrightarrow A$ المعرف بالشكل

$\forall x \in A \; ; \; d_a(x) = [a, x]$

بما أن $B \subset A$ لنأخذ مقصور d_a على B

وهو التطبيق $d'_a : B \longrightarrow A$

$\forall x \in B \, , \, d_a(x) = d'_a(x)$

$\forall x \in B \, , \quad d'_a(x) = d_a(x) \in d_a(B) \subseteq B$

ومنه فإن

$d'_a : B \longrightarrow B$

• $\forall x, y \in B \, , \quad d'_a(\underset{\in B}{x+y}) = d_a(x+y)$

$= d_a(x) + d_a(y) = d'_a(x) + d'_a(y)$

• $\forall \alpha \in K \; ; \; d'_a(\underset{B}{\alpha x}) = d_a(\alpha x) = \alpha d_a(x) = \alpha d'_a(x)$

/ /

الموضوع: ....

- $d'_a([x,y]) = d_a([x,y]) = [a,[x,y]]$ (with $[x,y] \in B$)

$= -[x,[y,a]] - [y,[a,x]] =$

$= [x,[a,y]] + [[a,x],y] = [x, d_a(y)] + [d_a(x), y]$

$= [d'_a(x), y] + [x, d'_a(y)]$

لهذا الشكل نجد أن d'_a تطبيق اشتقاق داخلي على B

بما أن $d'_a \in Inn(B)$ فإن يوجد $b \in B$ بحيث

$d'_a = d_b : B \to B$

ومنه $\forall x \in B$; $d'_a x = d_b(x)$

$[a,x] = [b,x]$

ومنه $[a-b,x] = 0$

وبالتالي يكون $a-b \in Z_A(B)$

ومنه يوجد $t \in Z_A(B)$ بحيث $a-b = t$

$\Leftarrow a = t + b \in B + Z_A(B)$

ومنه فإن ~~$a \in$~~

$A \subseteq B + Z_A(B)$

لهذا الشكل نجد أن $A = B + Z_A(B)$

من تعريف B بسيطاً ⇐ $x \in B \cap Z_A(B) \subseteq Z(B) = 0$

عندئذ $x \in B$ و $x \in A$

$Z_A B = \{a \in A ; [a,x] = 0 \ \forall x \in B\}$

فإن $[x,y] = 0 \ \forall y \in B$